

Олимпиада Школ Балтийского Моря 2011
12. класс

1. Какое число больше

$$2^{468} \text{ или } 8^{642} ?$$

2. Найти наибольшее значение функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln(2 + \sin x) + (\sin x)^3$$

если такое существует.

3. У фокусника в цирке спрашивают чему равняется

$$\sqrt[71]{1\,004\,525\,211\,269\,079\,039\,999\,221\,534\,496\,697\,502\,180\,541\,686\,174\,722\,466\,474\,743}.$$

В правилах игры есть уговор что ответ должен быть целым числом. Фокусник удивляет зрителей, сообщая им немедленно ответ, который сразу проверяют, и он оказывается правильным. Позже становится известно, что фокусник посмотрел только на последний номер числа из которого извлекается корень и примерно определил его длину.

Чему равен ответ и как фокусник его нашёл?

4. Рассмотрим рациональное число:

$$q = \frac{1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \dots 2011^{2011}}{1^{2011} \cdot 2^{2010} \cdot 3^{2009} \dots 2011^1} \left(= \prod_{k=1}^{2011} \frac{k^k}{k^{2012-k}} \right).$$

Доказать, что q является на самом деле целым числом.

5. Рассмотрим пять точек A, B, C, D и E на плоскости и все отрезки между этими точками $AB, AC, AD, AE, BC, \dots, DE$. Как расставить точки так, что бы длина семи отрезков была равна единице? Доказать, что длина восьми отрезков не может быть равна единице, как бы точки не были расставлены.