

Itämeren koulujen matematiikkakilpailu 2011

Lukion 3. vuosiluokka

1. Kumpi on suurempi,

$$2^{46^8} \text{ vai } 8^{64^2} ?$$

2. Määritä kuvauksen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln(\sin x + 2) + (\sin x)^3$$

suurin arvo, jos sellainen on olemassa.

3. Sirkuksessa taikurilta kysytään, mitä on

$$\sqrt[71]{1\,004\,525\,211\,269\,079\,039\,999\,221\,534\,496\,697\,502\,180\,541\,686\,174\,722\,466\,474\,743}.$$

Pelin henkeen kuuluu, että kaikki tietävät vastauksen olevan kokonaisluku. Taikuri kohauttaa yleisöä kertomalla miltei välittömästi vastauksen, joka tarkastetaan ja jonka todetaan olevan oikea. Jälkikäteen paljastuu, että taikuri katsoi vain juurrettavan viimeistä numeroa ja arvioi sen numeroiden lukumäärän. Mikä on vastaus ja miten taikuri sai sen selville?

4. Tarkastellaan rationaalilukua

$$q = \frac{1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 2011^{2011}}{1^{2011} \cdot 2^{2010} \cdot 3^{2009} \cdot \dots \cdot 2011^1} \left(= \prod_{k=1}^{2011} \frac{k^k}{k^{2012-k}} \right).$$

Todista, että q itse asiassa on kokonaisluku.

5. Sijoitetaan tasoon viisi pistettä A, B, C, D ja E sekä tarkastellaan näiden yhdysjanoja $AB, AC, AD, AE, BC, \dots, DE$. Näytä, että pisteet voi sijoittaa tasoon niin, että yhdysjanoista seitsemän pituus on yksi. Osoita, että kahdeksan yhdysjanojan pituus ei millään voi olla yksi.